Noms	Fatimetou m/Mohamed Mahmoud
	Kadijetou m/Isselkou.

Generalités sur les Fonctions

Generalités sur les fonctions

Exercice 5

$f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$

1) f est définie, continue et dérivable sur $[0,\pi]$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \cos(0) = 1$
* $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = f(\pi) = \cos(\pi) = -1$
* $f'(x) = -\sin x$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

* $k = 0 \Rightarrow x = 0$ $(\in [0,\pi])$
* $k = 1 \Rightarrow x = \pi$ $(\in [0,\pi])$
* $k = 2 \Rightarrow x = 2\pi$ $(>\pi)$
* $k = -1 \Rightarrow x = -\pi$ (<0)

T.V de f

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

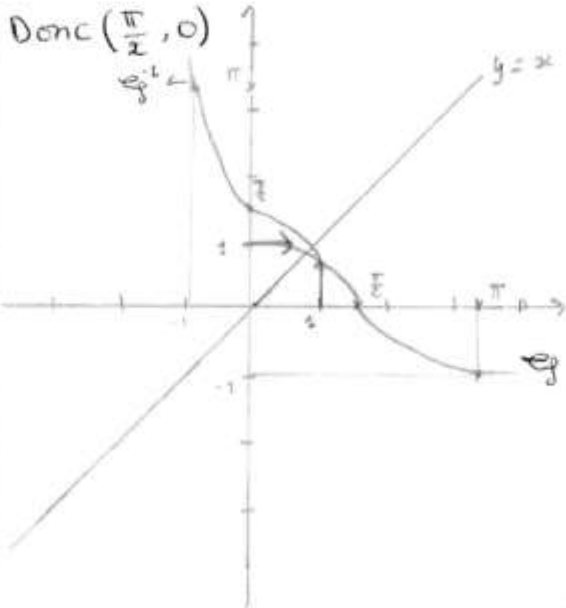
Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0,\pi]$ elle réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur l'intervalle $J = [-1,1]$

2) * $\mathscr{C}_f \cap (y'y)$ $f(0) = 1$; $(0,1)$

* $\mathscr{C}_f \cap (x'x)$ $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{et} \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Donc $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$



3) Comme f est dérivable et comme sa dérivé ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert $]0,\pi[$ la fonction f^{-1} est donc dérivable sur $f(]0,\pi[) =]-1,1[$

et $\forall x \in]-1,1[$, $f^{-1\prime}(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

or $f'(y) = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y}$

$f'(y) = -\sqrt{1-f(y)^2}$

D'où $f^{-1\prime}(x) = \dfrac{1}{-\sqrt{1-[f(f^{-1}(x))]^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Donc $\forall x \in]-1,1[$ $\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$

4) on pose $\forall x \in [-1,1]$ $h(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$

alors h est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$

$h'(x) = f^{-1\prime}(x) - f^{-1\prime}(-x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}}\right)$

$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

Donc $\forall x \in]-1,1[$, $h'(x) = 0$

D'où h est constante sur $]-1,1[$

or : $0 \in]-1,1[$ et $h(0) = f^{-1}(0) + f^{-1}(0) = 2f^{-1}(0)$

or : $\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\pi}{2} \in [0,\pi] \end{cases}$

D'où $f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

Donc $2f^{-1}(0) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$

D'où $\forall x \in]-1,1[$ $h(x) = \pi$

C-à-d $\forall x \in]-1,1[$ $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = \pi$

D'autre part $h(-1) = f^{-1}(-1) + f^{-1}(1) = \pi + 0 = \pi$

et $h(1) = f^{-1}(1) + f^{-1}(-1) = 0 + \pi = \pi$

Conclusion

$\boxed{\forall x \in J : f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = \pi}$

Exercice 6 :

$x + \tan x = 0$

* on pose $f(x) = x + \frac{\sin x}{\cos x}$

f est définie ssi $\cos x \neq 0$

* $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

si $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ $(\in [-\pi,\pi])$

si $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi$ $(>\pi)$

si $k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ $(\in [-\pi,\pi])$

si $k = -2 \Rightarrow x = \frac{-3\pi}{2}$ $(<-\pi)$

Donc f est définie sur

$[-\pi,\pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} = [-\pi,-\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi]$

* f est continue et dérivable sur :

$[-\pi,-\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

* $\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = f(-\pi) = -\pi + 0 = -\pi$

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \left(x + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = -\frac{\pi}{2} + \left(\frac{-1}{0^-}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \left(\frac{-1}{0^+}\right) = -\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{0^-}\right) = -\infty$

* $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = f(\pi) = \pi + 0 = \pi$

* $f'(x) = 1 + 1 + \tan^2 x = 2 + \tan^2 x$, $\forall x \in D_f$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\pi$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	π

Donc sur chacun des trois intervalles

$[-\pi,-\frac{\pi}{2}[$, $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2},\pi]$

La fonction f est continue strictement monotone et elle change de signe ; d'où, l'équation $f(x) = 0$ (c-à-d l'éq $x + \tan x = 0$) admet dans chacun de ces trois intervalles une solution unique donc au total elle admet exactement trois solution dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Noms	Kadijetou m/Isselkou
	Fatimetou m/Mohamed Mahmoud

Generalités sur les Fonctions :

exercice 9 :

$f(x) = \frac{2x+1}{2x-4}$

1) $x \in D_f \Rightarrow 2x-4 \neq 0$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$f'(x) = \frac{2(2x-4)-2(2x+1)}{(2x-4)^2} = \frac{-10}{(2x-4)^2} < 0$

$\Rightarrow f$ est strictement $\searrow$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{2x}{2x} = 1$

$\Rightarrow y = 1$ A.H de $\mathcal{C}$ au voisinage de (∞)

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

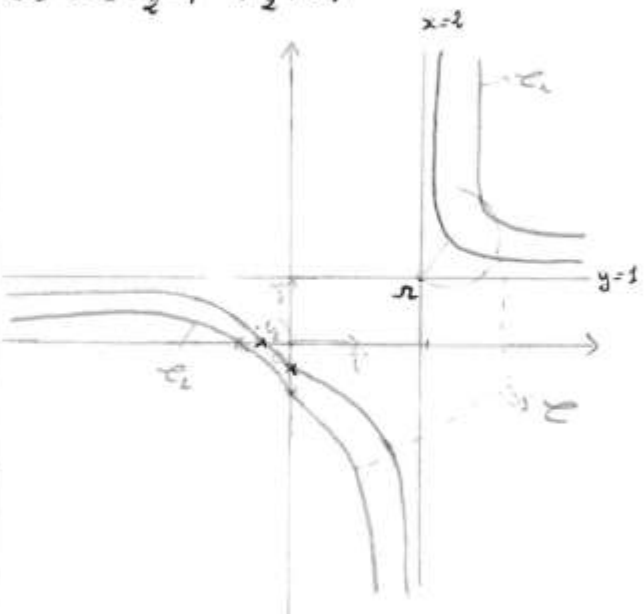
$x = 2 \Rightarrow$ A.V

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 $\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	1

$\mathcal{C} \cap (oy) : f(0) = -\frac{1}{4}$ $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

$\mathcal{C} \cap (ox) : f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$



2) $\Omega(2,1)$ $h(\Omega, K)$, $K \in \mathbb{R}^*/\{1\}$

$f_K(Kx + (1-K)2) = K\left(\frac{2x+1}{2x-4}\right) + (1-K)$

$f_K(Kx + 2(1-K)) = \frac{K(2x+1)}{2x-4} + 1 - K$

on pose $X = Kx + 2(1-K)$; $x = \frac{X - 2(1-K)}{K}$

$f_K(X) = \frac{K\left(2\left(\frac{X-2(1-K)}{K}\right)+1\right)}{2\left(\frac{X-2(1-K)}{K}\right)-4} + 1 - K$

$= \frac{2x - 4(1-K) + K}{\frac{2x-4(1-K)}{K} - 4} + 1 - K \Rightarrow f_K(x) = \frac{K(2x + 5K - 4)}{2x - 4} + 1 - K \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f_K(x) = \frac{K(2x + 5K - 4)}{2x - 4} + 1 - K}$$

Noms	Kadijetou m/Isselkou
	Fatimetou m/Mohamed Mahmoud

Generalités sur les Fonctions

Exercice 7:

$f(x) = x^2 - 2x + a$ et $g(x) = -x^2$

En un point d'abscisse x_0, une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

et une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ est

$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

on doit donc avoir $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ \text{et} \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$

calculons $f'(x)$ et $g'(x)$

$f'(x) = 2x - 2$ et $g'(x) = -2x$

D'où on doit avoir $\begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + a = x_0^2 \ (1) \\ \text{et} \\ 2x_0 - 2 = -2x_0 \ (2) \end{cases}$

De (2) on a $4x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$

et en remplaçant dans (1) on obtient :

$\frac{1}{4} - 1 + a = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

Exercice 3:

$f(x) = x^4 - \frac{4}{x}$

Montrons que l'équation $f(x) = \sin x$ admet une solution sur $I = [1, 2]$

$\Leftrightarrow$ M.q $f(x) - \sin x = 0$ admet une solution sur I.

Soit $h(x) = f(x) - \sin x$

$h(x) = x^4 - \frac{4}{x} - \sin x$

h est continue sur $I = [1; 2]$

$h(1) = 1^4 - \frac{4}{1} - \sin 1 = -3 - \sin 1 < 0$

$h(2) = 2^4 - \frac{4}{2} - \sin 2 = 14 - \sin 2 > 0$

Comme $h(1)\ h(2) < 0$

$\Rightarrow 0 \in h(I)$

D'après T.V.I

$h(x_0) = 0$

$f(x) - \sin x = 0$

$f(x_0) - \sin x_0 = 0$

Donc l'équation admet une solution x_0

Exercice 15 :

$f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$

1) $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$

f_0 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 4 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

T.V de f_0

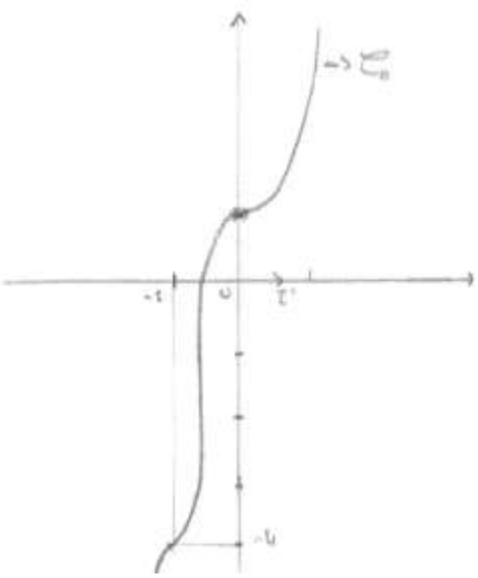
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_0'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

b) Comme f_0 est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et comme elle change de signe l'équation $f_0(x) = 0$ admet une unique solution U_0

et comme $f_0(-1) = -4 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$

Donc $-1 < U_0 < 0$ c-à-d

$\boxed{U_0 \in]-1, 0[}$



2) a) $M(x,y) \in C_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow M(x,y) \in C_n \cap C_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$f_n(x) = y$ et $f_{n+1}(x) = y \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $f_{n+1}(x) = f_n(x) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \cancel{x^3} + 2[(n+1)+2]x + \cancel{1} = \cancel{x^3} + 2(n+2)x + \cancel{1}$

$\Leftrightarrow 2(n+3)x = 2(n+2)x$

$\Leftrightarrow 2nx + 6x = 2nx + 4x \Leftrightarrow 6x = 4x \Rightarrow 2x = 0$

$\boxed{x = 0}$ $\quad \boxed{f_{n+1}(0) - f_n(0) = 1}$

Donc : Toutes les courbes C_n passant par le point $A(0,1)$

b) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^3 + 2(n+3)x + 1 - (x^3 + 2(n+2)x + 1))$

$\Leftrightarrow \cancel{x^3} + \cancel{2nx} + 6x + \cancel{1} - \cancel{x^3} - \cancel{2nx} - 4x - \cancel{1}$

Donc : $\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) = 2x}$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	$-$	0	$+$
P. R	$\frac{C_n}{C_{n+1}}$	P.I	$\frac{C_{n+1}}{C_n}$

3. a) $f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$

$D_f \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$

$\Longrightarrow$ (Suite vers la feuille suivante)

Noms	Fatimetou m/Mohamed Mahmoud
	Kadijetou m/Isselkou.

Generalites sur les Fonctions

Suite Exercice 15 :

3.a)

* $f_n'(x) = 3x^2 + 2(n+1) > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{N}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
$f_n(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Comme f_n est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et comme elle change de signe l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution

et comme $f_n(-1) = -2(n+1) < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

et $f_n(0) = 1 > 0$

$\boxed{\text{Donc } U_n \in]-1,0[}$

b) on a $U_n \in]-1,0[$ $\forall n \in \mathbb{N}$

or nous avons vu dans 2.b) que $\forall x \in]-\infty,0[$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 2x$ et $]-1,0[\subset]-\infty,0[$

D'où $\forall x \in]-1,0[$ $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

Donc $f_{n+1}(U_{n+1}) - f_n(U_{n+1}) < 0$

D'où $f_{n+1}(U_{n+1}) < f_n(U_{n+1})$

D'où $f_{n+1}(U_{n+1}) = 0$

D'où $0 < f_n(U_{n+1})$

or $f_n(U_n) = 0$

D'où $f_n(U_n) < f_n(U_{n+1})$

or $f_n(U_n) < f_n(U_{n+1})$

or f_n est strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

D'où $U_n < U_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Donc la suite } U_n \text{ est croissante}}$

Et comme (U_n) est $\nearrow$ et majorée par 0 elle est donc Convergente.

Exercice 12:

1) $I=[\frac{\pi}{2},\pi[$, $f(x)=\frac{1+\sin x}{\sin x}$

$x\in I$ Etudions les variations de f sur I

Comme $\sin x\neq 0$ $\forall x\in[\frac{\pi}{2},\pi[$, la fonction f est definie, continue et derivable sur I.

x	$\frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ π
$\sin x$	$+$ $\qquad$ 0

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=f(\frac{\pi}{2})=\frac{1+\sin(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})}=\frac{1+1}{1}=2$

$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=f(\pi)=\frac{1+\sin\pi}{\sin\pi}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$f'(x)=\frac{\cos x\sin x-\cos x(1+\sin x)}{\sin^2 x}=\frac{\cos x\sin x-\cos x-\cos x\sin x}{\sin^2 x}$

$\boxed{f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ x\in[\frac{\pi}{2},\pi[\end{cases}$ $\quad x=\frac{\pi}{2}$

T.V de f

x	$\frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ π
$f'(x)$	0 $\quad +$
$f(x)$	2 $\nearrow$ $+\infty$

Comme f est Continue et strictement monotone sur $I=[\frac{\pi}{2},\pi[$ alors elle réalise une bijection de I sur $J=f(I)=[2,+\infty[$

2) M.q $\forall x\in I$; $f'(x)\overset{?}{=}(f(x)-1)\sqrt{(f(x))^2-2f(x)}$

$=\left(\frac{1+\sin x}{\sin x}-1\right)\sqrt{\left(\frac{1+\sin x}{\sin x}\right)^2-2\left(\frac{1+\sin x}{\sin x}\right)}$

$=\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\sin^2 x}-\left(\frac{2+\sin x}{\sin x}\right)}$

$=\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1+2\sin x+\sin^2 x-2\sin x-2\sin^2 x}{\sin^2 x}}$

$=\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{|\cos x|}{\sin x}$

$=\frac{-\cos x}{\sin x}=f'(x)$

Donc. $\boxed{f'(x)=(f(x)-1)\sqrt{(f(x))^2-2f(x)}}$

3) Comme f est derivable et comme sa derivée ne s'annule pas sur l'intervale ouvert $]\frac{\pi}{2},\pi[$

$* f^{-1}=(f(f^{-1}(x)))=x$

$f^{-1}(x)=(f(f^{-1}(x))-1)\sqrt{(f(f^{-1}(x)))^2-2(f(f^{-1}(x)))}$

$f^{-1}=(x-1)\sqrt{x^2-2x}$

$\boxed{(f^{-1})=\sqrt{x^2-2x}+(x-1)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2x}}}$

Noms	Kadijetou m/ Isselkou
	Fatimetou m/ Mohamed Mahmoud

Primitives et Integrales

Suite Exercice 18 : $J = \int$

3) $J = \int_{\tan 0}^{\tan\frac{\pi}{4}} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\, dt$

où φ est fonction f issue en b) Donc
$J = F(\frac{\pi}{4})$ lorsque $\varphi(t) =$

or dans ce cas $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $F(x) = \tan^2 x - x$
et $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ d'où $F(\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}$

Donc $\boxed{J = 1 - \frac{\pi}{4}}$

Partie C

1) $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt$

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 \leq 1+t^2 \leq 2$

$0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow$

$0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et en multipliant par t^{2n}
($t^{2n} \geq 0$ $\forall t \in [0,1]$) on obtient

$0 \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$

D'où $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \leq \int_0^1 t^{2n}$

Donc $0 \leq U_n \leq \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

D'où $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1} - 0$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{N}\ 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

D'où d'après le T.G

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$

$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2} + t^{2n}}{1+t^2} dt = \int_0^1 t^{2n} \frac{\cancel{(1+t^2)}}{\cancel{1+t^2}} dt$

$= \int_0^1 t^{2n} dt$

$U_{n+1} + U_n = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} - 0 = \frac{1}{2n+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}}$

Donc pour $n = 1$ on a
$U_2 + U_1 = \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$

or $U_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = J = 1 - \frac{\pi}{4}$

D'où
$U_2 + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}$

Donc pour $n = 1$ on a $U_2 + U_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Donc

$\boxed{U_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}}$

Et pour $n=2$ on a $U_3+U_2=\frac{1}{2\times2+1}=\frac{1}{5}$

$U_3+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$

$U_3=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}$

$\boxed{U_3=\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}}$

3) on a:

$V_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}$

ç a d: $V_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

or nous avons montrons dans ② que :

$\forall k\in\mathbb{N}, U_{k+1}+U_k=\frac{1}{2k+1}$

D'où $\forall k\in\mathbb{N}$

$\boxed{(-1)^k(U_{k+1}+U_k)=\frac{1}{2k+1}}$

Donc

$(-1)^0(U_1+U_0)=\frac{(-1)^0}{1}$

$(-1)^1(U_2+U_1)=\frac{(-1)^1}{3}$

$(-1)^2(U_3+U_2)=\frac{(-1)^2}{5}$

$(-1)^3(U_4+U_3)=\frac{(-1)^3}{7}$

$\vdots$

$(-1)^n(U_{n+1}+U_n)=\frac{(-1)^n}{2n+1}$

Et en addition membre à membre on a :

$U_0+(-1)^n U_{n+1}=V_n$

Donc : $(-1)^n U_{n+1}=V_n-U_0$

D'où : $|(-1)^n U_{n+1}|=|V_n-U_0|$

Donc :

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad |U_{n+1}|=|V_n-U_0|}$

or : $\lim_{n\to+\infty}U_{n+1}=0$

D'où : $\lim_{n\to+\infty}|U_{n+1}|=0$

D'où $\lim_{n\to+\infty}|V_n-U_0|=0$

D'où

$\lim_{n\to+\infty}V_n=U_0$

$=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=I=\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}V_n=\frac{\pi}{4}}$

4) on a : donc $\forall n\in\mathbb{N}\ |U_{n+1}|=|V_n-\frac{\pi}{4}|$

Pour que V_n soit une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-2} près il suffit que :

$|V_n-\frac{\pi}{4}|<10^{-2}$

ç a d $|U_{n+1}|<10^{-2}$

or de ① on a

$\forall k\in\mathbb{N}\quad 0\leq U_k\leq\frac{1}{2k+1}$

D'où : pour $k=n+1$ on a :

$0\leq U_{n+1}\leq\frac{1}{2n+3}$

on doit avoir :

$\frac{1}{2n+3}<10^{-2}$

ç a d : $2n+3>10^2$

ç a d $2n+3>100$

ç a d $2n>100-3$

ç a d : $n>\frac{97}{2}=48,5$

Il suffit donc de prendre $\boxed{n=94}$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Noms	Kadijetou m/ Isselkou
	Fatimetou m/ Mohamed mahmoud

Primitives et Integrales

Exercice 2 :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$$

1) $ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}=f(x), \forall x\in D_f$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2(ax+b)+c}{(x+1)^2}=f(x), \forall x\in D_f$

$\Leftrightarrow \frac{(x^2+2x+1)(ax+b)+c}{(x+1)^2}=f(x), \forall x\in D_f$

$\Leftrightarrow \frac{ax^3+bx^2+2ax^2+2bx+ax+b+c}{(x+1)^2}=f(x)$

$\Leftrightarrow \frac{ax^3+(b+2a)x^2+(2b+a)x+b+c}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+2a=3 \\ 2b+a=3 \\ b+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3-2\times 1=1 \\ 2\times 1+1=3 \\ c=-3-1=-4 \end{cases}$$

$\forall x\in D_f$

$$\boxed{f(x)=x+1-\frac{4}{(x+1)^2}}$$

2) $\forall x\in D_f$, $f(x)=x+1-\frac{4}{(x+1)^2}$

Donc $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{4}{(x+1)}+C}$

est une primitive de f sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

Exercice 4 :

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}$

$* \ I=\int_0^1\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\Leftrightarrow I=\int_0^1\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})dx$

D'où $I=\left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+1})^2\right]_0^1$

$I=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}-1}{2}\Rightarrow \boxed{I=\sqrt{2}+1}$

$* \ J=\int_0^1\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}dx$

$\Leftrightarrow J=\int_0^1\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}dx$

d'où $J=\left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$

$J=\frac{-1}{1+\sqrt{2}}+1 \Rightarrow \boxed{J=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$

Exercice 6 :

$U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

1) Comme la fonction $t \longmapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,1]$ d'où l'intégrale U_n existe et l'écriture $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ définie bien une suite numérique.

2) $U_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,dt$

on a : $0 \leq t \leq 1$ (et en multipliant par $\frac{t^n}{1+t^2}$)

on obtient : $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$

D'où :

$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

D'où (U_n) est $\searrow$ et positive.

et comme elle est $\searrow$ et minoré par 0 elle est donc convergente.

3) $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 0 < 1 \leq 1+t^2 \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$

Donc $\frac{1}{2}\int_0^1 t^n\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt$

D'où $\frac{1}{2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

Donc : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - 0\right) \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

D'où $\forall x \in \mathbb{N}$ $\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

D'où d'après le T.G (Théorème de gendarme)

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$

Exercice 8 :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x\,dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x\,dx$

1) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x + x\cos^2 x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$

$I + J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0\right)$

$\boxed{I + J = \frac{\pi^2}{8}}$

2) $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x\cos 2x)\,dx$

on utilise une intégration par parties :

on pose : $\begin{cases} u(x) = -x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$I - J = \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I - J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\,dx$

$I - J = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$

$\boxed{I - J = \frac{1}{2}}$

3) on résout le système $\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$

Par addition : $2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi^2+8}{16}}$

Par soustraction $2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi^2-8}{16}}$

Noms	Fatimetou m/Mohamed Mahmoud
	Kadijetou m/Issetkou.

Primitives et Integrales

Exercice 10

$I_1=\int_1^2\frac{dx}{(4x+5)^2}$; $t=4x+5$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=9 \\ x=2 \Rightarrow t=13 \end{cases}$

$dt=4\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{4}dt$

$I_1=\int_9^{13}\frac{1}{4}\times\frac{1}{t^5}dt=\frac{1}{4}\int_9^{13}t^{-5}dt$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{-4}t^{-4}\right]_9^{13} \Rightarrow \boxed{I_1=\frac{-1}{16}(13^{-4}-9^{-4})}$

$\star\ I_2=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$; $x=\tan t$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \tan t=1 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4} \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow \tan t=\sqrt{3} \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$dx=(1+\tan^2 t)dt \Leftrightarrow dx=(1+x^2)dt$

$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1+x^2)}{1+x^2}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dt$

$I_2=[t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$ $\boxed{I_2=\frac{\pi}{12}}$

$\star\ I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\,dx}{1+\cos x}$; $t=\tan\frac{x}{2}$

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\tan 0=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\tan\frac{\pi}{4}=1 \end{cases}$

$dt=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx \Rightarrow dt=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

on sait que $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ alors :

$I_3=\int_0^1\frac{4\times 2\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dt=\int_0^1 4\,dt$

$I_3=[4t]_0^1 \Rightarrow \boxed{I_3=4}$

$\star\ I_4=\int_2^3\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$; $t=x-1$

$\begin{cases} x=2 \Rightarrow t=1 \\ x=3 \Rightarrow t=2 \end{cases}$

$dt=dx$; $t=x-1 \Rightarrow x=t+1$

$I_4=\int_1^2\frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}dt=\int_1^2\frac{(t^3+3t^2+3t+1)}{t^{\frac{1}{2}}}$

$I_4=\int_1^2(t^{\frac{5}{2}}+3t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})dt$

$I_4=\left[\frac{1}{\frac{5}{2}+1}t^{\frac{5}{2}+1}+\frac{3}{\frac{3}{2}+1}t^{\frac{3}{2}+1}+\frac{3}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^2$

$I_4=\left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$

$I_4=\left[\sqrt{t}\left(\frac{2}{7}t^3+\frac{6}{5}t^2+2t+2\right)\right]_1^2$

$\boxed{I_4=\sqrt{2}\left(\frac{16}{7}+\frac{24}{5}+6\right)-\left(\frac{2}{7}+\frac{6}{5}+4\right)}$

$\star\ I_5=\int_0^2\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}$; $t=\sqrt{1+x}$ puis $t=\tan u$.

1ère étape : $t=\sqrt{x+1}$

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=\sqrt{3} \end{cases}$ $dt=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx=\frac{1}{2t}dx$ $\boxed{dx=2t\,dt}$

on sait que : $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
$=t^2(t^2+1)$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Alors : $I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t\,2t\,dt}{t^2(t^2+1)} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1}$

$2^{\text{ème}}$ étape : $t = \tan u$

$\begin{cases} t=1 \Rightarrow \tan u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \\ t=\sqrt{3} \Rightarrow \tan u = \sqrt{3} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$dt = (1+\tan^2 u)\,du$

alors : $I_5 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1+\tan^2 u)\,du}{\tan^2 u + 1} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} du$

$I_5 = [u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{I_5 = \frac{\pi}{12}}$

Exercice 12

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

on pose $t = a+b-x$

$\begin{cases} x=a \Rightarrow t = a+b-a \Rightarrow t=b \\ x=b \Rightarrow t = a+b-b \Rightarrow t=a \end{cases}$

$dt = -dx$

alors $\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a f(t)(-dt)$
$= \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx}$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$

on pose $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car quotient de deux fonction colinéaires.

on prend : $a=0$; $b = \frac{\pi}{2}$ donc

$a+b-x = \frac{\pi}{2} - x$

$f(a+b-x) = f(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{\cos^3(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos^3(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^3(\frac{\pi}{2}-x)}$
$= \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

D'après ① :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx \Leftrightarrow \boxed{I = J}$

* $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$

$I + J = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 \Leftrightarrow \boxed{I+J = \frac{\pi}{2}}$

* $\begin{cases} I = J \\ I + J = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I = J = \frac{\pi}{2}}$

3) $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x})\,dx$

on pose : $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}$

$a = \frac{\pi}{6}$; $b = \frac{\pi}{3}$ f est continue sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

on a. $f(a+b-x) = f(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x) = f(\frac{\pi}{2}-x)$

$f(\frac{\pi}{2}-x) = \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} - \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}$
$= -f(x)$

d'après ①

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\frac{\pi}{2}-x)\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

$\boxed{K = -K \Rightarrow K = 0}$

Noms: Kadijetou m/Isselkou
Fatimetou m/Mohamed Mahmoud

Primitives et Integrales

Exercice 14:

$$I_{K,n}=\int_0^1 C_n^K x^K\cdot(1-x)^{n-K}dx$$

1) la fonction $(x\longmapsto C_n^K x^K(1-x)^{n-K}$ est continue sur $[0,1]$ pour tout K et $n\in\mathbb{N}$ tels que $0\leq K\leq n$, $n\geq 2$ car un polynome (en developpant)

Alors l'integrale $I_{K,n}$ existe pour tout n et K.

2) En utilisant une integration par partie

on pose: $\begin{cases} U'(x)=C_n^K x^K \\ V(x)=(1-x)^{n-K}\end{cases}$

Alors $\begin{cases} U(x)=\frac{C_n^K}{K+1}x^{K+1} \\ V'(x)=-(n-K)(1-x)^{n-K-1}\end{cases}$

$$I_{K,n}=\left[\frac{C_n^K}{K+1}x^{K+1}(1-x)^{n-K}\right]-\int_0^1-\frac{(n-K)}{K+1}C_n^K x^{K+1}(1-x)^{n-K-1}dx$$

$$I_{n,n}=0+\int_0^1\frac{(n-K)}{K+1}C_n^K\cdot x^{K+1}\cdot(1-x)^{n-(K+1)}dx$$

on a: $C_n^{K+1}=\frac{n!}{(K+1)!(n-K-1)!}$

$$C_n^{K+1}=\frac{n!\times(n-K)}{(K+1)K!(n-K)(n-K-1)!}$$

$$=\frac{n-K}{K+1}\times\frac{n!}{K!(n-K)!}$$

$$C_n^{K+1}=\frac{n-K}{K+1}\cdot C_n^K$$

Alors en remplaçant:

$$I_{K,n}=\int_0^1 C_n^{K+1}x^{K+1}(1-x)^{n-(K+1)}dx$$

$$\boxed{I_{K,n}=I_{K+1,n}}$$

on en deduit que la suite $(I_{K,n})$ est constante par rapport à K.

c-a-d: $I_{K,n}=I_{0,n}=I_{n,n}$ (Independant de K)

$$I_{n,n}=\int_0^1 C_n^n x^n(1-x)^0dx$$

$$I_{n,n}=\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\boxed{I_{n,n}=\frac{1}{n+1}}$$

Alors:

$$\boxed{I_{K,n}=\frac{1}{n+1}}$$

Pour tout $K\leq n$.

Exercice 16:

$$\text{Si } C_n = \frac{b-a}{n} \sum_{K=0}^{n-1} f\left(a + K\frac{(b-a)}{n}\right)$$

$$\text{Alors } \lim_{n\to+\infty} C_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{n-1}{n}}}\right)$$

$$= \frac{2-1}{n}\left(f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots\cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$S_n = \frac{2-1}{n}\sum_{K=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{K(2-1)}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[2\sqrt{x+1}\right]_1^2 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$S_n = n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$

$$= n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\left(n\left(2-\frac{1}{n}\right)\right)^2}\right)$$

$$= n \times \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1-0}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots\cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}}$$

3) $f(x) = \cos^2 x$

$$S_n = \frac{\pi}{n}\left(1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos^2\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots + \cos^2\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

$$a = 0\,;\ b = \pi \qquad S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{K=0}^{n-1} f\left(\frac{K\pi}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}}$$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Noms	Fatimetou m/Mohamed Mahmoud
	Kadijetou m/Isselkou

Primitives et Integrales

Exercice 18 : $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

Partie A

1) f est definie ssi $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \text{et} \\ \frac{x}{1-x} \geqslant 0 \end{cases}$

	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{x}{1-x}$	$-$	0	$+$		$-$

$D_f = [0,1[$ f est continue sur $D_f = [0,1[$ et derivable sur $]0,1[$

Etudions la derivabilité de f à droite en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}-0}{x-0} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x} = \frac{\frac{x}{1-x}}{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}} = \frac{x}{x(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc f n'est pas derivable à droite en 0 et $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point $(0;0)$

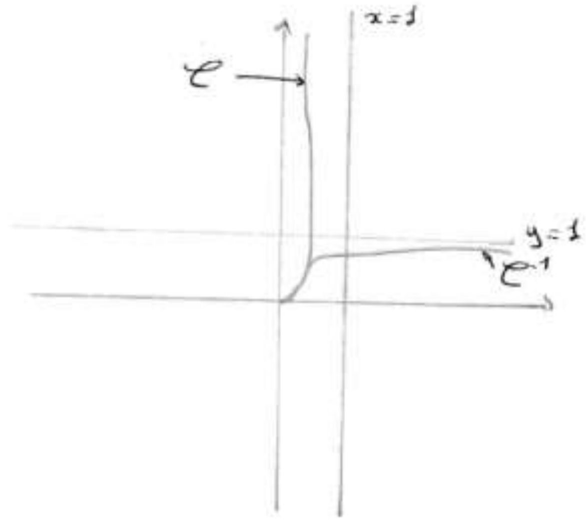
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty$$

* $x=1$ A.V à $\mathcal{C}$
* $\forall x \in]0,1[$ $f'(x) = \dfrac{\frac{1-x+1}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} > 0$$

x	0		1
$f'(x)$	‖	$+$	‖
f	0	$\nearrow$	$+\infty$



2) Comme f est continue et strictement monoton sur l'intervalle $[0,1[$ elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur l'intervalle $J=f([0,1[)=[0,+\infty[$

et elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} défini sur $[0,+\infty[$

$f^{-1}(x)=y \Rightarrow f(y)=x$

$\Leftrightarrow \frac{y}{1+y^2}=x^2 \Leftrightarrow y=x^2-yx^2 \Rightarrow y+yx^2=x^2$

$\Leftrightarrow y(1+x^2)=x^2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{x^2}{1+x^2}}$ donc

$\forall x\in[0,+\infty[\ \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x^2}{1+x^2}}$

• La courbe $\mathcal{C}'$ et f^{-1} le symetrique de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite l'équation $y=x$

3) le symetrique par rapport à la droite $y=x$ du domaine D delimité par $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation $x=0$ et $y=1$ est le domaine D' delimité par $\mathcal{C}'$ et de droite d'équation $y=0$ et $x=1$ or l'aire du D' est

$$\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

Partie B

1) $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$F(x)=\int_0^{\tan x}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$$

Comme les fonctions $u(x)=0$ et $V(x)=\tan x$ sont derivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et tan prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et comme la fonction $f(t)=\frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est donc derivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$F'(x)=V'(x)f(V(x))-u'(x)f(u(x))$

or $F'(x)=(1+\tan^2 x)f(\tan x)+0f(0)$

$$=(1+\tan^2x)\left(\frac{\varphi(\tan x)}{1+\tan^2 x}\right)=\varphi(\tan x)$$

2.a) $\varphi(t)=1$

Donc $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ f'(x)=1$

D'où $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ F'(0)=1$

Donc il existe une constante C telle que

$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$F(x)=x+C$ or $0\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$;

d'où d'une part :

$$F(0)=\int_0^{\tan 0}\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^0\frac{1}{1+t^2}dt=0$$

D'autre part:

$F(0)=0+C=C$ Donc $C=0$

D'où $\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ F(x)=x}$

b) $\varphi(t)=t^2$ Donc $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ F'(x)=\varphi(\tan x)$

d'où $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ F'(x)=\tan^2 x=1+\tan^2x-1$

Donc il existe une constante C telle que $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$F(x)=\tan x-x+C$

or $0\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ d'ou d'une part $F(0)=\int_0^{\tan 0}\frac{t^2}{1+t^2}dt=0$

et d'autre part $F(0)=\tan(0)-0+C \Rightarrow C=0$

D'où $C=0$ Donc

$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ f(x)=\tan x-x}$

3) $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\tan\frac{\pi}{4}}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$

où φ est la fonction definie

Donc $I=F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ lorsque $\varphi(t)=1$ on dans ce cas

on a $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $F(x)$ et $\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ D'où

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$ D'ou $\boxed{I=\frac{\pi}{4}}$ $\Longrightarrow$ (Suite)